GRATIS ØVEARK

Formelark: Differentialregning

Matematik B (stx) · regler, afledede funktioner og et gennemregnet eksempel til hver regel

Pensumakademiet

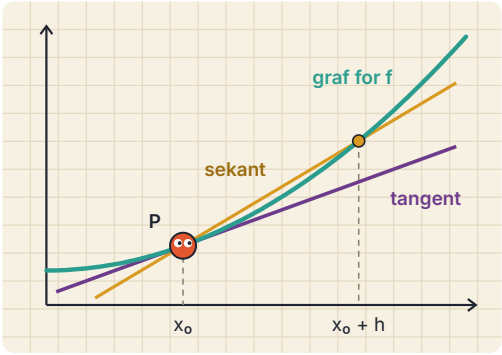
1 · Differentialkvotienten

Hvad er det? $f'(x_0)$ er **hældningskoefficienten for tangenten** til grafen for f i punktet $P(x_0, f(x_0))$. Hvis x er en tid, er $f'(x_0)$ **væksthastigheden** til tidspunktet x_0.

Definition. Differentialkvotienten er grænseværdien af differenskvotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Brøken er **differenskvotienten**: hældningen af sekanten gennem P og et nabopunkt. Når h går mod 0, drejer sekanten ind på tangenten.



Sekanten (gul) går gennem P og et nabopunkt. Tangenten (lilla) rører kun grafen i P. Dens hældning er $f'(x_0)$.

EKSEMPEL $f(x) = x^2$ i $x_0 = 3$, i tre trin:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

$6 + h$ går mod 6, når h går mod 0. Altså er $f'(3) = 6$.

EKSEMPEL **Væksthastighed.** En tønde fyldes, og efter t minutter er der $V(t) = 2t^2$ liter vand i den. Så er $V'(t) = 4t$ og $V'(3) = 12$: efter 3 minutter stiger vandmængden med 12 liter pr. minut.

HUSK Væksthastighed har enhed: er $f(x)$ målt i cm og x i døgn, er $f'(x)$ målt i cm pr. døgn.

2 · Afledede funktioner

Her er k og a konstanter. I a^x er $a > 0$, og $\ln(x)$, $\log(x)$ og $\sqrt{x}$ kræver $x > 0$.

$f(x)$	$f'(x)$	EKSEMPEL
k	0	$(7)' = 0$
x	1	
$a \cdot x$	a	$(-4x)' = -4$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$(x^5)' = 5x^4$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{3}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(6\sqrt{x}\right)' = \frac{3}{\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$	EKSEMPEL
e^x	e^x	$(5e^x)' = 5e^x$
$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$	$(e^{3x})' = 3e^{3x}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$(2^x)' = 2^x \cdot \ln(2)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$(4\ln(x))' = \frac{4}{x}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(10)}$	

HUSK Potensreglen dækker også rødder og brøker: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ og $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Fx er $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$.

Hvilken regel skal jeg bruge?

Se på, hvordan forskriften er bygget op. Reglerne står på næste side.

Led med plus eller minus imellem

$3x^2 - 5x + 1$

Differentiér ét led ad gangen.

Et tal ganget på en funktion

$7\ln(x)$

Tallet bliver stående.

To funktioner ganget sammen

$x^2 \cdot e^x$

Brug produktreglen.

En funktion inden i en anden

$(3x + 1)^4$

Brug kædereglen.

3 · Regneregler

Konstant gange funktion

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Konstanten bliver stående.

EKSEMPEL $(4x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$

Sum og differens

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Differentiér ét led ad gangen.

EKSEMPEL $(x^2 + e^x)' = 2x + e^x$

$$(x^3 - \ln(x))' = 3x^2 - \frac{1}{x}$$

Produkt

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

EKSEMPEL $(x^2 \cdot e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

TYPISK FEJL at gange de to afledede med hinanden. Det er forkert: $(x^2 \cdot e^x)' \neq 2x \cdot e^x$

Sammensat funktion (kædereglen)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Den ydre differentieret (med den indre stående), gange den indre differentieret.

EKSEMPEL

$$((3x + 1)^4)' = 4 \cdot (3x + 1)^3 \cdot 3 = 12 \cdot (3x + 1)^3$$

TYPISK FEJL at glemme den indre differentieret. Det er forkert: $((3x + 1)^4)' \neq 4 \cdot (3x + 1)^3$

4 · Tangentens ligning

Tangenten til grafen for f i punktet $P(x_0, f(x_0))$ har ligningen

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

1. Beregn punktets y-værdi $f(x_0)$.
2. Find $f'(x)$, og beregn hældningen $f'(x_0)$.
3. Indsæt de to tal, og reducér.

EKSEMPEL $f(x) = x^2 + 1$ i punktet $P(2, f(2))$:
$f(2) = 2^2 + 1 = 5$ og $f'(x) = 2x$, så $f'(2) = 4$.

$$y = 4 \cdot (x - 2) + 5 = 4x - 3$$

TYPISK FEJL at bruge $f(x_0)$ som hældning. Hældningen er $f'(x_0)$.

5 · Monotoniforhold og ekstrema

1. Find $f'(x)$.
2. Løs $f'(x) = 0$. Her har grafen **vandret tangent**.
3. Lav en **fortegnslinje for** $f'(x)$: indsæt et tal fra hvert interval.
4. Konkludér: $f'(x) > 0$ giver **voksende**, $f'(x) < 0$ giver **aftagende**. Skifter fortegnet fra + til –, er der **lokalt maksimum**. Fra – til + er der **lokalt minimum**.

HUSK $f'(x_0) = 0$ er ikke nok. Fortegnet skal skifte: $f(x) = x^3$ har $f'(0) = 0$, men intet ekstremum.

EKSEMPEL $f(x) = x^3 - 12x$ har $f'(x) = 3x^2 - 12$.

$3x^2 - 12 = 0 \iff x = -2$ eller $x = 2$

$f'(-3) = 15 > 0$, $f'(0) = -12 < 0$, $f'(3) = 15 > 0$.

x		-2		2	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. maks.	↘	lok. min.	↗

f er voksende i intervallerne $]-\infty; -2]$ og $[2; \infty[$ og aftagende i intervallet $[-2; 2]$.

Lokalt maksimum $f(-2) = 16$ og lokalt minimum $f(2) = -16$.

Optimering

Opstil en funktion af én variabel, og angiv hvilke x der giver mening. Find ekstremum som ovenfor, og svar med enhed.

EKSEMPEL 60 m hegn til tre sider af et rektangel op ad en mur, $0 < x < 30$.
Areal: $A(x) = x \cdot (60 - 2x) = 60x - 2x^2$
$A'(x) = 60 - 4x$, og $A'(x) = 0$ giver $x = 15$.
Største areal: $A(15) = 450$ m².

Et øveark, ikke en formelsamling til prøven. Arket er lavet til at øve sig med og forstå reglerne. Til den skriftlige delprøve uden hjælpemidler må du kun bruge den formelsamling, der er udmeldt til prøven. Spørg din lærer, hvis du er i tvivl.

Pensumakademiet · @pensumakademiet på Instagram og TikTok · Udgave 1.1 · november 2026 · Udgivet af Knapek forretning, CVR 39560607, Pladehals Allé 18, 2450 København SV · pensumakademiet@proton.me · Skrevet med AI-hjælp. Udregningerne er efterregnet maskinelt · © 2026 Knapek forretning. Arket er gratis og må deles i uændret form. Det må ikke sælges · Skrifter: Inter og Fira Math